Trigonometrie-Training

Rechtwinklige Dreiecke
und Vierecke
in 16 Anwendungsaufgaben

Nahezu alle Lösungen gelingen ohne Sinussatz und Kosinussatz.
Aufgaben zu diesen Sätzen findet man im Text 16032.

Datei Nr. 16022

Stand 11. August 2023

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

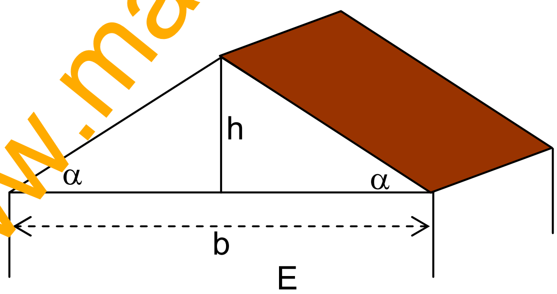
Aufgabe 100

Eine 4 Meter lange Leiter wird auf einem horizontalen Boden aufgestellt und gegen eine vertikale Hauswand gelehnt.

Damit sie nicht wegrutscht, sollte der Neigungswinkel gegen den Boden höchstens 75^{O} aber mindestens 60^{O} sein.

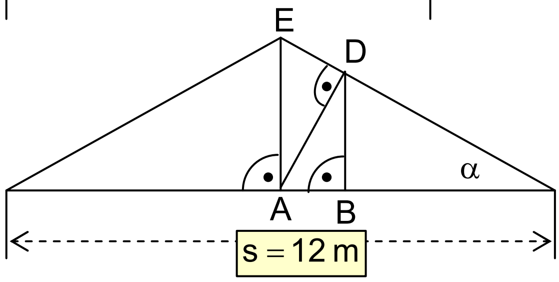
Wie groß muss am Boden der Mindestabstand und der Höchstabstand von der Hauswand sein?

Aufgabe 101



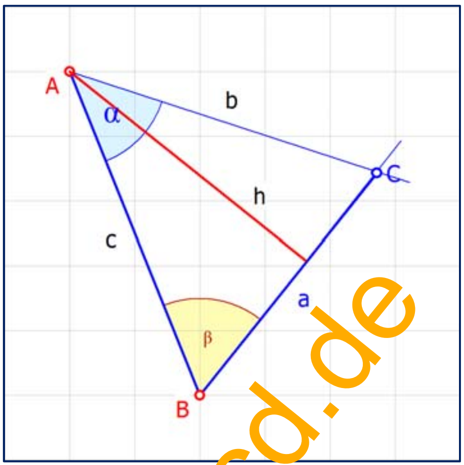
In einem Bebauungsgebiet sind Satteldächer mit einer Dachneigung von $\alpha = 24^{O}$ vorgeschrieben.

a) Wie breit darf ein Haus dann höchstens sein, wenn die Firsthöhe h = 3,5 m werden soll?



b) Ein Haus soll 12 m breit werden. Berechne die Länge der Stützbalken AE, AD und BD im Dachraum.

Aufgabe 102



Die Klasse 10 des Goethe-Gymnasiums unternimmt einen Fahrradausflug. Die geplante Tour führt vom Ausgangspunkt A über die beiden Ortschaften B und C und weiter nach A.

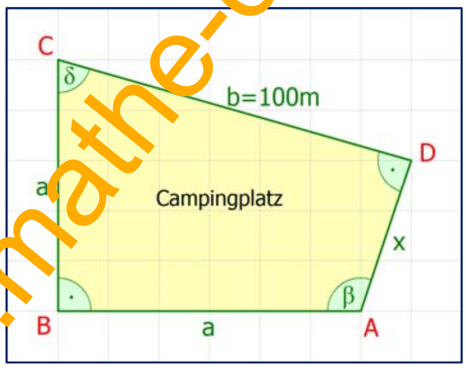
Die Entfernung von A nach B beträgt 16 km.

Außerdem ist $\alpha = 50^\circ$ und $\beta = 60^\circ$.

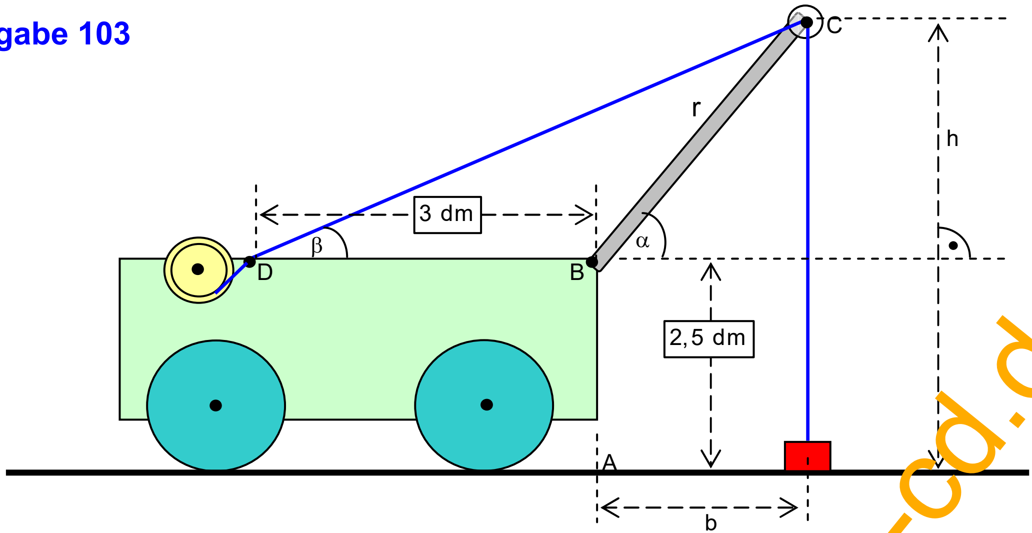
a) Wie lang ist die Tour?

b) Einige Schüler verfehlen die Abzweigung in C und fahren über D zurück nach A.
Um wie viele Kilometer ist deren Fahrtstrecke länger als die geplante Tour?

c) Unterwegs kommen die Radler an einem Campingplatz vorbei (siehe Skizze rechts).
Wie lang ist der Zaun um den Campingplatz?
Es ist $\delta = 75^\circ$.



Aufgabe 103



Der abgebildete Spielzeugkran funktioniert folgendermaßen:

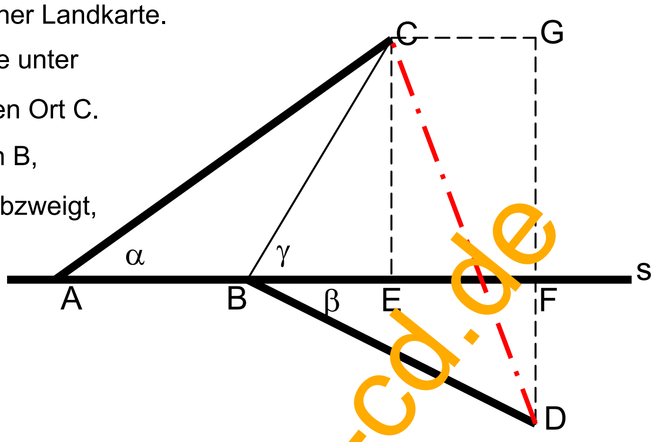
Der Mast BC ist 5 dm lang, er lässt sich um den Punkt B in seinem Anstellwinkel α verändern, d.h. um B drehen. Dabei kann α im Bereich zwischen 30° und 70° liegen.
Die Höhe von B über A (wo man sich eine Stütze denken kann), ist 2,5 dm groß.
Der Punkt D, in dem das Halteseil DC umgelenkt wird, ist 3 dm von B entfernt,
und das Halteseil bildet mit DB den Winkel β.

a) In welcher Entfernung b vom Punkt A kann eine Last höchstens liegen, damit sie vom Kran hochgezogen werden kann?

b) Welche maximale Höhe h erreicht die Spitze C des Mastes BC?

c) Welche Werte kann der Winkel β annehmen?

Aufgabe 104



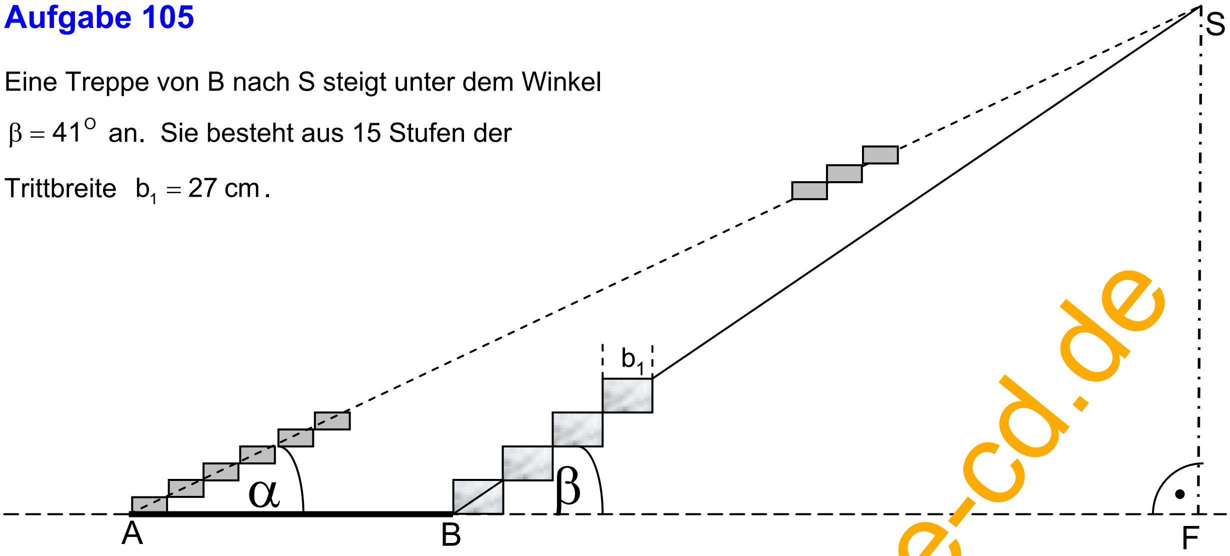
Nebenstehende Abbildung ist ein Ausschnitt aus einer Landkarte.
Von einer Geraden Straße s zweigt in A eine Straße unter dem Winkel $\alpha = 48°$ ab und erreicht nach 12 km den Ort C.
Fährt man von A aus 6 km weiter, kommt man nach B, wo nach rechts unter $\beta = 32°$ eine Straße nach D abzweigt, von B nach D sind es 18 km.

a) Die dünne Linie von B nach C ist ein gradliniger Wanderweg.
Wie lang ist er, und unter welchem Winkel γ zweigt er von der Straße s ab?

b) Die Orte C und D sollen durch eine gradlinige Straße (Strichpunkte) verbunden werden. Wie lang wird diese Straße?
(Anleitung: Berechne über das Dreieck BDF die Strecken EF und DF usw.)

Aufgabe 105

Eine Treppe von B nach S steigt unter dem Winkel $\beta = 41^{\circ}$ an. Sie besteht aus 15 Stufen der Trittbreite $b_1 = 27\text{ cm}$.



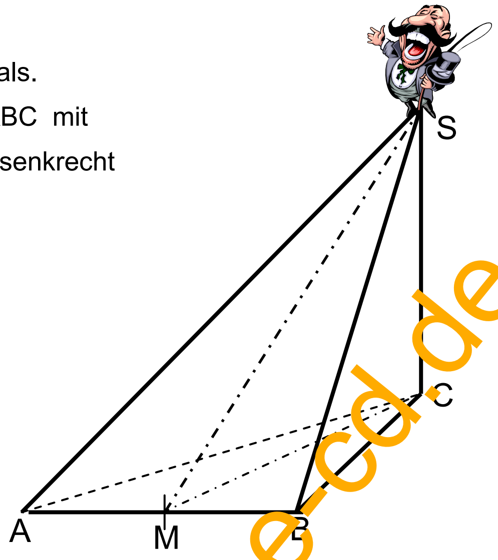
Diese Treppe soll durch eine flachere Treppe von A nach S ersetzt werden, deren Anstiegswinkel $\alpha = 25^{\circ}$ sein soll.

a) Wie hoch ist eine Treppe der alten Stufe?

b) Wie weit liegen die Treppeneinstiegspunkte A und B voneinander entfernt?

c) Die neue Treppe soll 22 Stufen erhalten.
Welche Abmessungen (b_2 , h_2) haben die neuen Stufen?

Aufgabe 106



Nebenstehende Skizze zeigt den Sockel eines Denkmals.
Seine Grundfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Grundseite AB. Die Höhe CS des Sockels steht senkrecht auf der Grundfläche!

Es ist $\overline{CS} = h = 5\text{ m}$, $\overline{BC} = a = 7\text{ m}$.

a) Berechne die Länge der Seitenkante BS und den Winkel $\gamma = \sphericalangle CBS$.

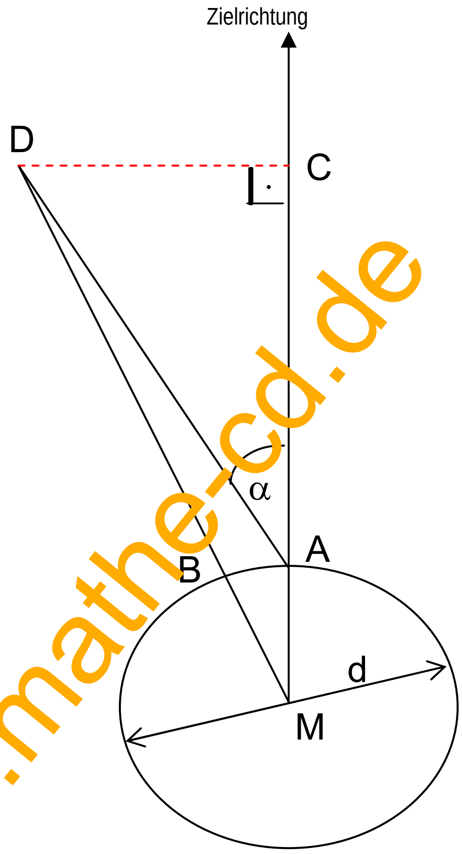
b) Es ist $\alpha = \sphericalangle BAC = 70^{\circ}$.
Berechne im Dreieck ABC die Länge der Grundseite AB und die Höhe CM.
Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

c) Es ist $\alpha = \sphericalangle CMS$, $\beta = \sphericalangle SBA$ und $\gamma = \sphericalangle CBS$.

Begründe, dass gilt $\sin\beta = \frac{\overline{MS}}{\overline{BS}}$ und $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin\gamma$.

Wieso folgt aus dieser Gleichung $\alpha \geq \gamma$?

Aufgabe 107



Der Abwurfkreis beim Diskuswerfen hat den Durchmesser $d = 2{,}5$ m, sein Mittelpunkt sei M.
Bei einem Wurf wird der Diskus im Punkt A abgeworfen und trifft im Punkt D auf dem Rasen auf. Dieser Wurf weicht um $\alpha = 35°$ von der Zielrichtung ab.
Die Entfernung von A nach D ist 40 m.

a) Wie weit liegt D von der Zielrichtung weg?

b) Als tatsächliche Wurfweite wird nicht die Flugstrecke AD gemessen wird, sondern BD, wobei B der Schnittpunkt der Geraden MD mit dem Kreis ist. Berechne den Unterschied zwischen der Flugstrecke AD und der gewerteten Wurfweite BD.

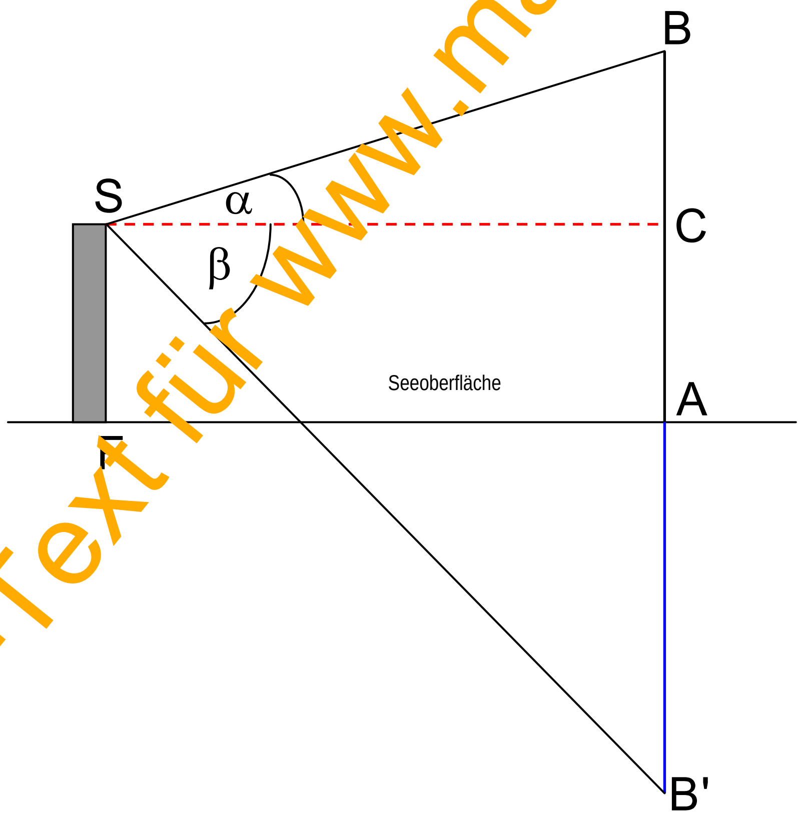
Aufgabe 108

Ein Heißluftballon B schwebt über einem See. Am Ufer des Sees steht ein 34 m hoher Turm FS. Ein Beobachter befindet sich im Punkt S.

Um die Höhe des Ballons über dem See zu bestimmen, misst der Beobachter den Höhenwinkel $\alpha = 73^{\circ}$ sowie den Tiefenwinkel $\beta = 75^{\circ}$, unter dem er das Spiegelbild B' des Ballons sieht. Dieses Spiegelbild B' entsteht also durch Spiegelung von B an FA.

Wie hoch schwebt der Ballon über dem See?

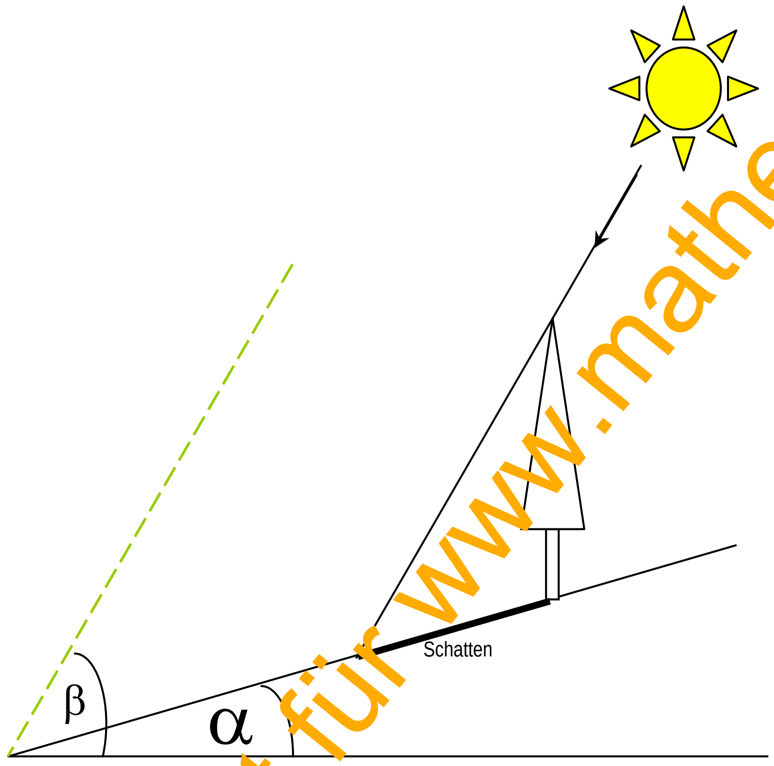
(Anmerkung: Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu. Die Größe der Winkel kann irritieren.)



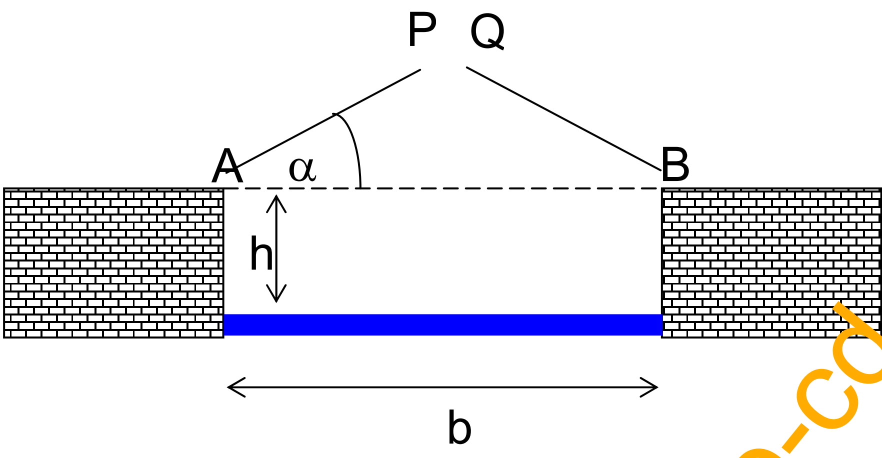
Aufgabe 109

Auf einem Berghang, der mit der Horizontalen den Winkel $\alpha = 20^\circ$ bildet, steht ein senkrecht gewachsener Baum. Wenn die Sonnenstrahlen mit der Horizontalen den Winkel $\beta = 65^\circ$ bilden, wirft der Baum einen 5 m langen Schatten.

Wie hoch ist der Baum?



Aufgabe 110

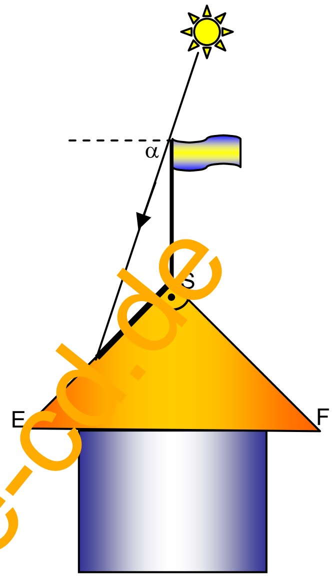


Über einen Fluss mit der Breite $b = 13$ m führt eine Zugbrücke. Das Gelenk A der Brücke liegt $h = 3{,}7$ m über dem Wasserspiegel. Die Brücke lässt sich höchstens so weit öffnen, dass die beiden Brückenhälften unter dem Winkel $\alpha = 31^{\circ}$ gegen die Horizontale geneigt sind.

a) Wie hoch liegen die Punkte P und Q über dem Wasserspiegel, wenn die Brücke so weit wie möglich geöffnet ist? Wie weit sind sie dann auseinander?

b) Das Deck eines Schiffes ist 6 m breit und ragt 4,50 m aus dem Wasser heraus.
Entscheide durch eine Rechnung, ob dieses Schiff unter der Zugbrücke durchfahren kann, wenn diese so weit wie möglich geöffnet ist.
(Von den Aufbauten des Schiffes darf in der Rechnung abgesehen werden.)

Aufgabe 111



Ein runder Turm, dessen Dach ein senkrechter Kreiskegel mit einem Öffnungswinkel von 90^O ist, hat auf der Spitze eine 4 m hohe Fahnenstange.

a) In einem bestimmten Augenblick fallen die Sonnenstrahlen unter einem Winkel von $\alpha = 31^O$ gegen die Horizontale ein. Wie lang ist der Schatten der Fahnenstange auf dem Dach?

b) Der Grundkreisdurchmesser EF des Daches hat die Länge 10 m. Welchen Winkel bilden die Sonnenstrahlen mit der Horizontalen, wenn der Schatten gerade bis zum Ende E des Daches reicht?

Aufgabe 112

In einem Würfel der Kantenlänge a = 30 cm liegt schräg ein Dreieck CPQ.

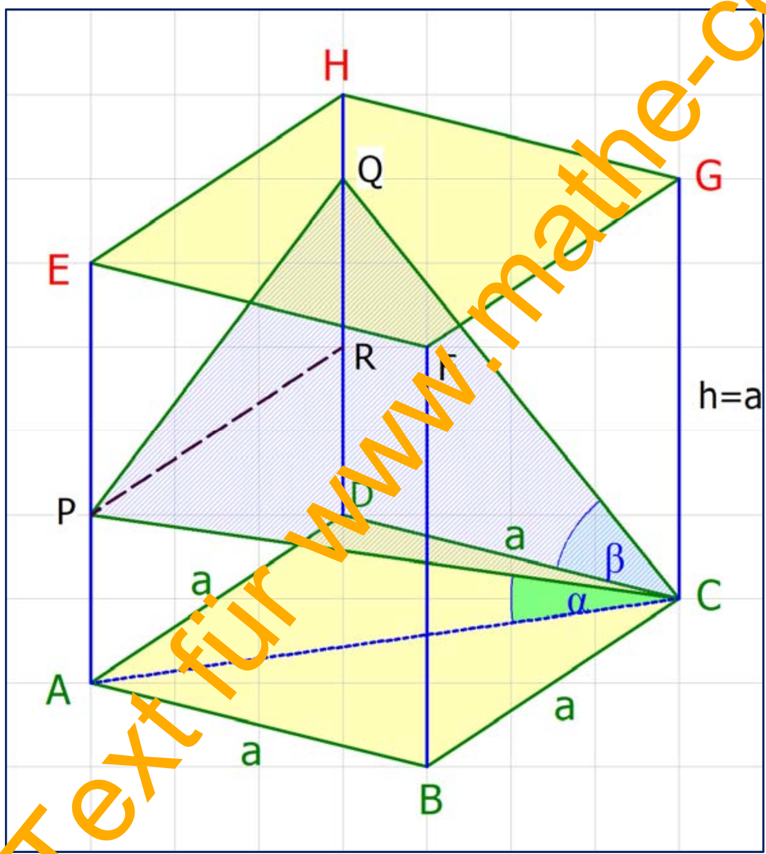
Berechne aus $\overline{CQ} = 38$ cm und $\overline{PC} = 45$ cm

a) die Winkel α und β ,

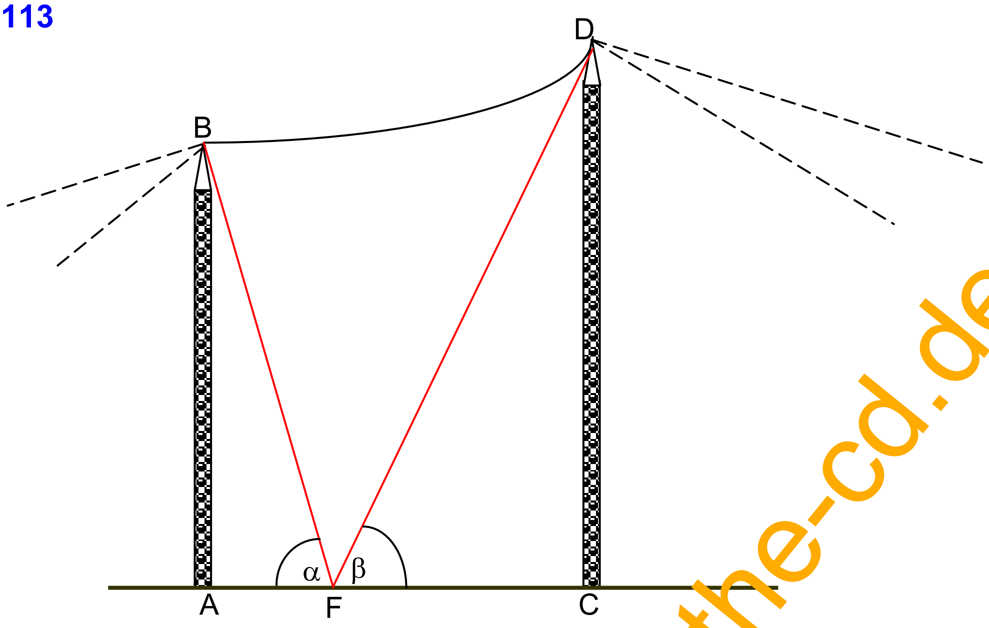
b) die Strecke QR,

c) die Dreiecksseite PQ

d) den Winkel $\delta = \sphericalangle PCQ$.



Aufgabe 113



Auf einer horizontalen Ebene stehen zwei senkrechte Sendemasten AB und CD, die 180 m voneinander entfernt sind. Auf der Verbindungsstrecke ihrer Fußpunkte A und C befindet sich in F eine Verankerung, von der aus Halteseile zu den Mastspitzen führen. Von F aus erscheint der 48 m hohe Mast AB unter dem Winkel $\alpha = 36{,}5^{\circ}$, der Sendemast CD unter $\beta = 29^{\circ}$.

a) Wie weit ist die Verankerung F von den Fußpunkten A und C der Sendemasten entfernt?

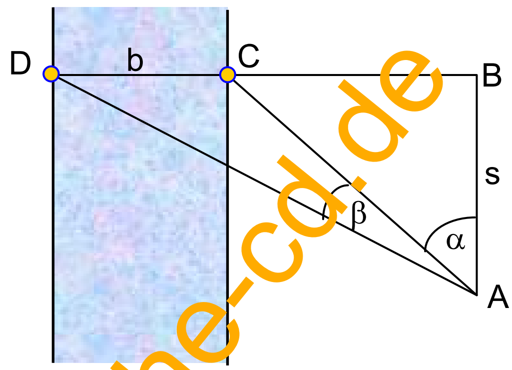
b) Wie hoch ist der Sendemast CD?

c) Zwischen den beiden Mastspitzen ist ein Antennendraht gezogen.
Wie lang ist dieser Draht, wenn er wegen seines Durchhangs um 15 % länger ist als der Abstand der Mastspitzen?

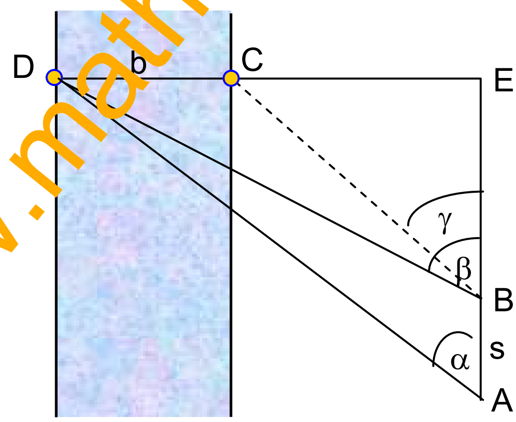
Aufgabe 114

Zwei Schüler haben die Aufgabe erhalten, mit einer trigonometrischen Methode die Breite eines Flusses zu bestimmen. Sie verwenden dieselbe Stelle, die dadurch geeignet erscheint, dass dort direkt am Ufer zwei Bäume C und D einander gegenüber stehen.

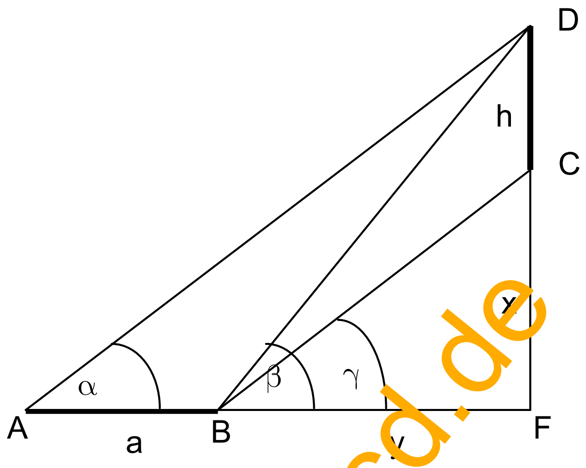
a) Hans markiert eine Stelle B auf der direkten Linie DC und steckt rechtwinklig zu CD eine Standlinie AB = s ab, die 44,2 m lang wird. Die Entfernung BC ist 34,3 m groß.
Schließlich misst er noch den Winkel $\beta = 23{,}0^{\circ}$.
Berechne die Breite b = CD des Flusses.



b) Sylvia bestimmt ebenso wie Hans eine Stelle E auf der Linie DC. Ihre Standlinie s = AB ist ebenfalls senkrecht zu CD und hat die Länge 20,0 m.
Sie bestimmt drei Winkel
$\alpha = 59{,}5^{\circ}$, $\beta = 71{,}4^{\circ}$ und $\gamma = 52{,}2^{\circ}$
Berechne die Breite b = DC des Flusses.



Aufgabe 115



An einer Kirchenwand hängt ein Kreuz DC, dessen Höhe bestimmt werden soll.
Es wird eine auf die Wand zulaufende Standlinie AB der Länge a = 9,00 m abgesteckt.
Man misst zusätzlich drei Höhenwinkel

$\alpha = 28{,}7^\circ$; $\beta = 58{,}4^\circ$ und $\gamma = 42{,}3^\circ$.

Berechne die Höhe CD des Kreuzes.

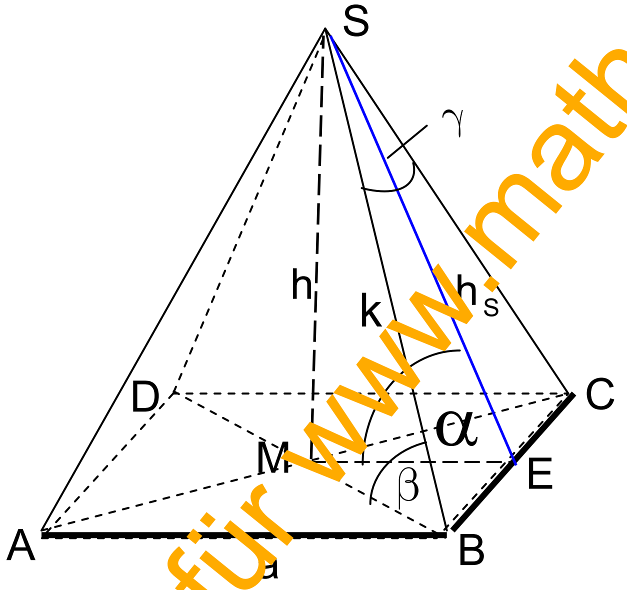
Aufgabe 116

Von einer quadratischen, symmetrischen Pyramide ist die Kantenlänge a = 24,0 cm bekannt sowie der Neigungswinkel $\alpha = 65{,}0^{\circ}$ der Dachflächen.

Berechne die Pyramidenhöhe h, den Neigungswinkel β der Dachkante k sowie deren Länge.

Wie groß ist ferner die Höhe h_S einer Dachfläche?

Unter welchem Winkel schneiden sich die Dachkanten in S?



Lösungsteil

Aufgabe 100

Eine 4 Meter lange Leiter wird auf einem horizontalen Boden aufgestellt und gegen eine vertikale Hauswand gelehnt.

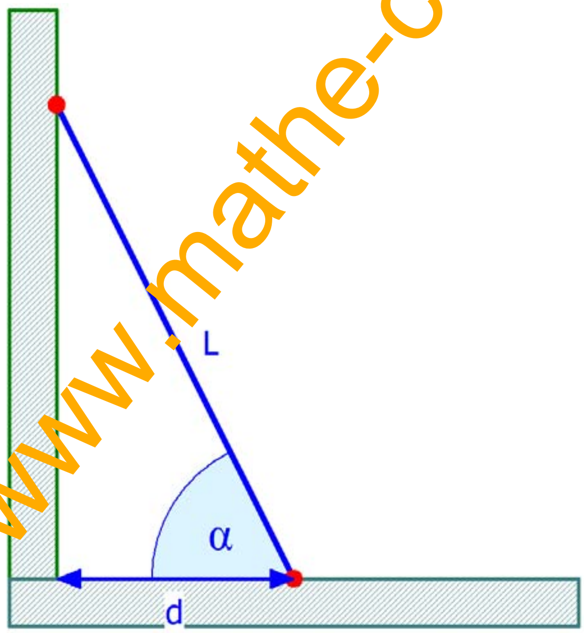
Damit sie nicht wegrutscht, sollte der Neigungswinkel gegen den Boden höchstens 75° aber mindestens 60° sein.

Wie groß muss am Boden der Mindestabstand und der Höchstabstand von der Hauswand sein?

Lösung:

Gegeben ist $L = 4\text{m}$.

$$\cos\alpha = \frac{d}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = L \cdot \cos\alpha}$$



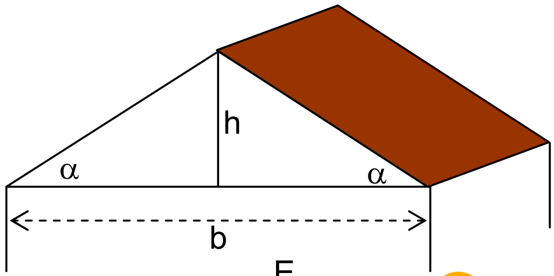
Minimalabstand:

$$\alpha = 75^{\circ} \quad \Rightarrow \quad d = 1{,}035\text{ m}$$

Maximalabstand:

$$\alpha = 60^{\circ} \quad \Rightarrow \quad d = 2{,}00\text{ m}$$

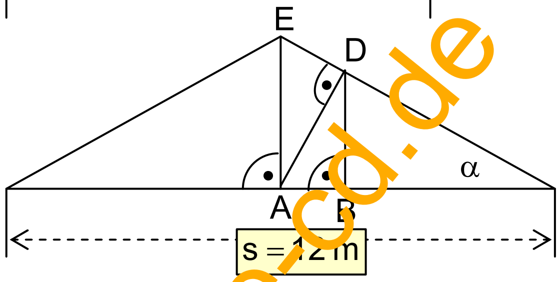
Aufgabe 101



In einem Bebauungsgebiet sind Satteldächer mit einer Dachneigung von $\alpha = 24^{o}$ vorgeschrieben.

a) Wie breit darf ein Haus dann höchstens sein, wenn die Firsthöhe h = 3,5 m werden soll?

b) Ein Haus soll 12 m breit werden. Berechne die Länge der Stützbalken AE, AD und BD im Dachraum.



Lösung 101

a) Mit $\alpha = 24^{o}$ und h = 3,5 m

folgt $\tan\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}b} \Rightarrow b = \frac{h}{\frac{1}{2}\cdot\tan\alpha} = \frac{2h}{\tan\alpha} = 15{,}72\text{ m}$

b) Bei $\alpha = 24^{o}$ und s = 12 m folgt im Dreieck AZE:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AE}}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\cdot\overline{AE}}{s} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{s}{2}\cdot\tan\alpha = 2{,}67\text{ m}$$

Im Dreieck AZD gilt:

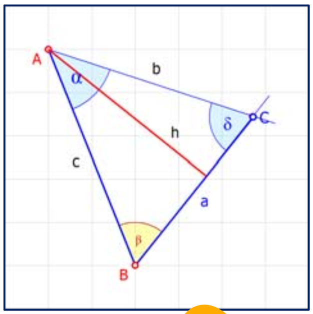
$$\sin\alpha = \frac{\overline{AD}}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\cdot\overline{AD}}{s} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{s}{2}\cdot\sin\alpha = 2{,}44\text{ m}$$

und $\cos\alpha = \frac{\overline{DZ}}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\cdot\overline{DZ}}{s} \Rightarrow \overline{DZ} = \frac{s}{2}\cdot\cos 24^{o} = 5{,}48\text{ m}$

Damit können wir jetzt im Dreieck BZD die Strecke BD berechnen:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{DZ}} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{DZ}\cdot\sin 24^{o} = 2{,}23\text{ m}$$

Lösung 102



Die geplante Tour führt vom Ausgangspunkt A über die beiden Ortschaften B und C weiter nach A.

Die Entfernung von A nach B beträgt 16 km. Es ist $\alpha = 50^O$ und $\beta = 60^O$.

a) Wie lang ist die Tour?

Im Teildreieck ABC gilt: $\sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}\cdot\sin\beta = 13{,}856 \text{ km}$

Im Teildreieck ABC gilt: $\cos\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AB}\cdot\cos\beta = 8{,}0 \text{ km}$

Gesamte Wegstrecke: $s_1 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 16 \text{ km} + 8 \text{ km} + 13{,}8 \text{ km} = 37{,}8 \text{ km}$

b) Einige Schüler verfehlen die Abzweigung in C und fahren über D zurück nach A. Um wie viele Kilometer ist deren Fahrtstrecke länger als die geplante Tour?

Teildreieck ABD: $\delta = 180^O - \alpha - \beta = 70^O$

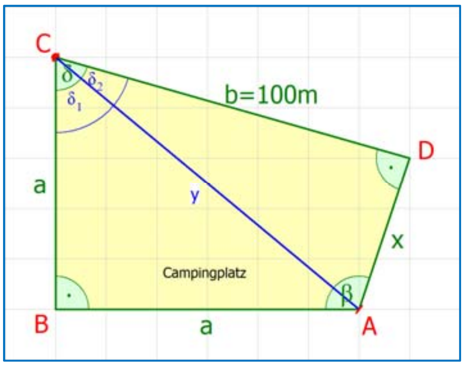
Teildreieck ACD: $\tan\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{AC}}{\tan\delta} = 5{,}043 \text{ km}$

$\sin\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\sin\delta} = 14{,}745 \text{ km}$

Mit Umweg: $s_2 = 14{,}745 \text{ km} + 5{,}043 \text{ km} + 8{,}0 \text{ km} + 16{,}0 \text{ km} = 43{,}788 \text{ km}$

Unterschied: $\Delta s \approx 6 \text{ km}$

c) Unterwegs kommen die Radler an einem Campingplatz vorbei (siehe Skizze rechts). Wie lang ist der Zaun um den Campingplatz? Es ist $\delta = 75^O$.



Das Teildreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig, also sind die Basiswinkel 45^O groß: $\delta_1 = 45^O$. Also folgt $\delta_2 = \delta - \delta_1 = 30^O$

Im Dreieck ADC kann man daher so rechnen:

$$\tan\delta_2 = \frac{x}{100 \text{ m}} \Rightarrow x = 100 \text{ m}\cdot\tan 30^O = 57{,}7 \text{ m}$$

$$\cos\delta_2 = \frac{b}{y} \Rightarrow y = \frac{b}{\cos\delta_2} = 115{,}5 \text{ m}$$

Damit folgt im Teildreieck ABC: $\sin\delta_1 = \frac{a}{y} \Rightarrow a = y\cdot\sin 45^O = 81{,}7 \text{ m}$

Ergebnis: Der Umfang beträgt $U = 2a + x + b = 321{,}1 \text{ m}$